کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

۱۰

طراحی ستون‌های لاغر

۱۰-۱ مقدمه

ستونی که تحت بار محوری و لنگر خمشی قرار گرفته است، تحت تأثیر لنگر خمشی و سایر عوامل از خود تغییر مکان جانبی بروز می‌دهد. مقدار لنگر خمشی، ابعاد مقطع و طول ستون و نیز مدول الاستیسیتهٔ ستون (سختی ستون)، شرایط انتهایی ستون و شرایط کلی قابی که ستون در آن قرار گرفته است، از جمله عواملی هستند که تغییر مکان جانبی ستون را تحت تأثیر قرار می‌دهند. تغییر مکان جانبی در هر قسمت از طول ستون نسبت به انتهای ستون (Δ)، خروج از مرکزیتی برای بار محوری (P) که در انتهای ستون اثر می‌کند، محسوب می‌شود. حاصل ضرب بار محوری در این خروج از مرکزیت ($P \times \Delta$)، لنگر خمشی اضافه‌ای را در طول ستون ایجاد می‌کند که "لنگر خمشی ثانویه" نامیده می‌شود. اثر این لنگر خمشی با "لنگر خمشی اولیه" که از ابتدا بر ستون اثر می‌کرده است، جمع شده و اثرات بحرانی‌تر در ستون ایجاد می‌کند. جمع لنگر خمشی اولیه و لنگر خمشی ثانویه به همراه بار محوری ستون، سبب شکست نهایی ستون می‌شوند.

اگر ستون تحت بار محوری و لنگر خمشی توام قرار گرفته باشد، تقریباً همیشه لنگر خمشی ثانویه ایجاد خواهد شد. با این وجود در بسیاری از مواقع، تأثیر لنگر خمشی ثانویه چندان زیاد نیست. به همین جهت معمولاً اجازه داده می‌شود که در شرایطی که اثرات لنگر ثانویه بیش از ۵ درصد از مقاومت ستون نمی‌کاهد، از اثرات آن صرف‌نظر شود. چنین ستون‌هایی به نام "ستون کوتاه" خوانده می‌شوند و بررسی آن‌ها بر اساس اصول ارائه شده در فصل ۹ انجام می‌گیرد. در مقابل در مواردی اثرات لنگر

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

ثانویه سبب کاهش مقاومت ستون بیش از ۵ درصد می‌شود. چنین ستون‌هایی به نام "ستون بلند" یا "ستون لاغر"[1] خوانده می‌شوند. در بررسی این ستون‌ها لازم است اثرات کاهش مقاومت ستون به جهت ایجاد لنگر ثانویه منظور شود. بررسی لاغری ستون بتن‌آرمه و چگونگی در نظر گرفتن اثرات لاغری در مقاومت ستون، در این فصل ارائه خواهد شد.

یک ستون هم‌چنین ممکن است به دلیل لاغری بیش از حد، به طور زود هنگام ناپایدار شده و کمانش کند. محاسبات بار کمانشی یک ستون بتن‌آرمه و تأثیر آن در محاسبات مربوط به لاغری ستون نیز در این فصل ارائه خواهد گردید.

۱۰-۲ رفتار ستون‌های لاغر و حالت‌های شکست آن

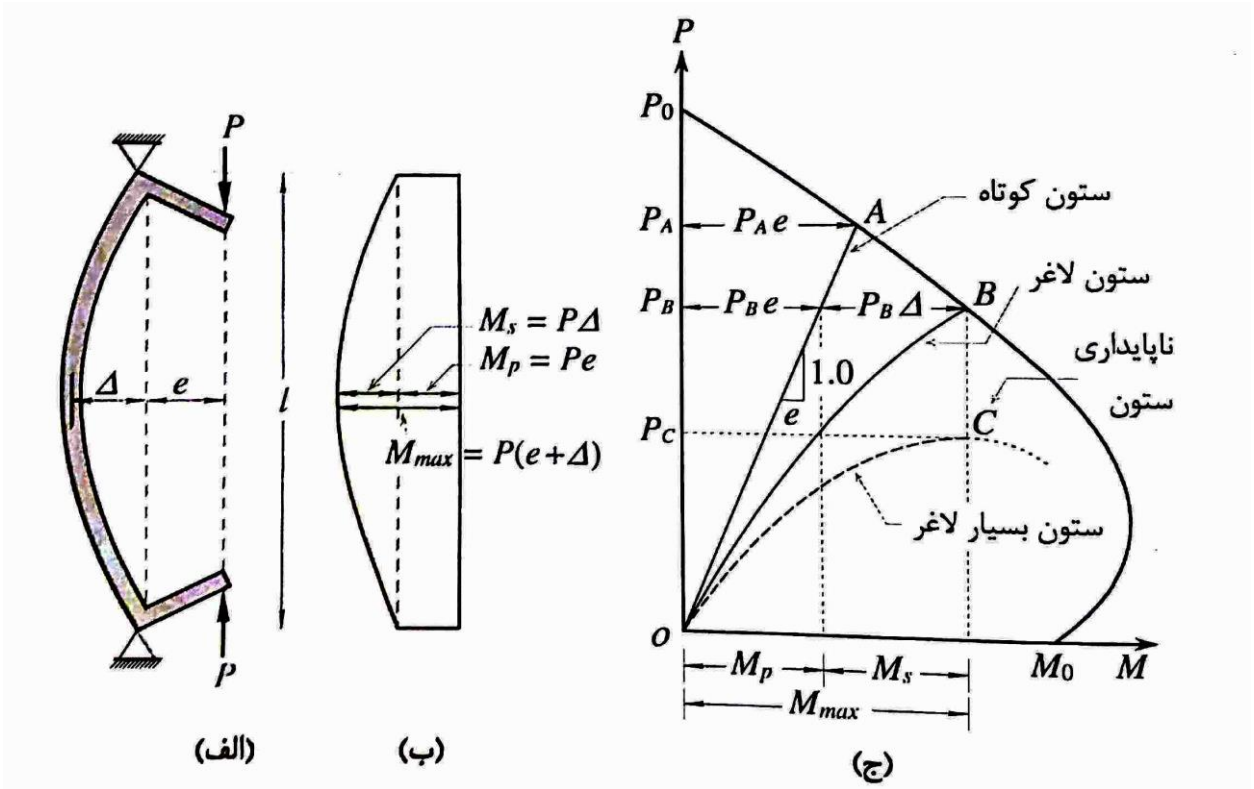
همان‌طور که ذکر شد، ستون لاغری که تحت بار محوری و لنگر خمشی قرار گرفته باشد، با کاهش مقاومت روبرو می‌شود که این مسأله به جهت افزایش لنگر خمشی به دلیل تغییر شکل جانبی ستون است. شکل ۱۰-۱ ستونی را نشان می‌دهد که در هر دو انتها، در یک خروج از مرکزیت e تحت بار محوری P قرار گرفته است، و بنابراین در هر دو انتها و در طول ستون، لنگر خمشی اولیهٔ $M_p = P.e$ ایجاد می‌شود. لنگر خمشی اولیه سبب ایجاد خمیدگی در طول ستون می‌شود که این تغییر شکل، خروج از مرکزیت مؤثر بار را در مقاطعی که از دو انتهای ستون دور هستند، افزایش می‌دهد؛ به طوری که اگر تغییر شکل جانبی ستون در وسط آن را با Δ نمایش دهیم، لنگر ثانویه‌ای برابر $M_s = P.\Delta$ ایجاد می‌شود و بنابراین لنگر حداکثر در وسط ستون برابر با مقدار زیر خواهد بود:

$$M_{\max} = M_p + M_s = P(e + \Delta) \qquad (۱-۱۰)$$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

توجه شود که در رابطهٔ فوق، ارتباط لنگر حداکثر با بارمحوری به صورت غیر خطی است؛ به طوری که هرچه P افزایش یابد، Δ هم افزایش می‌یابد و بنابراین M_{max} به مقدار بیش‌تری افزایش خواهد یافت.

در شکل ۱۰-۱-ج، منحنی اثر توام بار محوری و لنگر خمشی ستون نشان داده شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که اگر ستون کاملاً کوتاه باشد، به طوری که بتوان از تغییر شکل جانبی آن صرف‌نظر کرد، لنگر حداکثر به صورت $M_{max} = P.e$ است که ارتباط خطی با مقدار بار محوری دارد. در این حالت



شکل ۱۰-۱ *رفتار ستون لاغر تحت بار محوری و لنگر خمشی؛ الف) تغییرشکل جانبی ستون؛ ب) نمودار لنگرهای خمشی اولیه و ثانویه؛ ج) منحنی اثر توام بار محوری و لنگر خمشی*

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

مسیر $P-M$ در داخل سطح شکست، یک خط مستقیم است که سرانجام منحنی را در نقطهٔ A که متناظر با بار محوری P_A است، قطع می‌کند. این نقطه بیان‌گر ترکیب بار محوری P_A و لنگر خمشی $P_A.e$ است که منجر به خرد شدن بتن در محل لنگر حداکثر (وسط ستون) و خرابی ستون می‌شود.

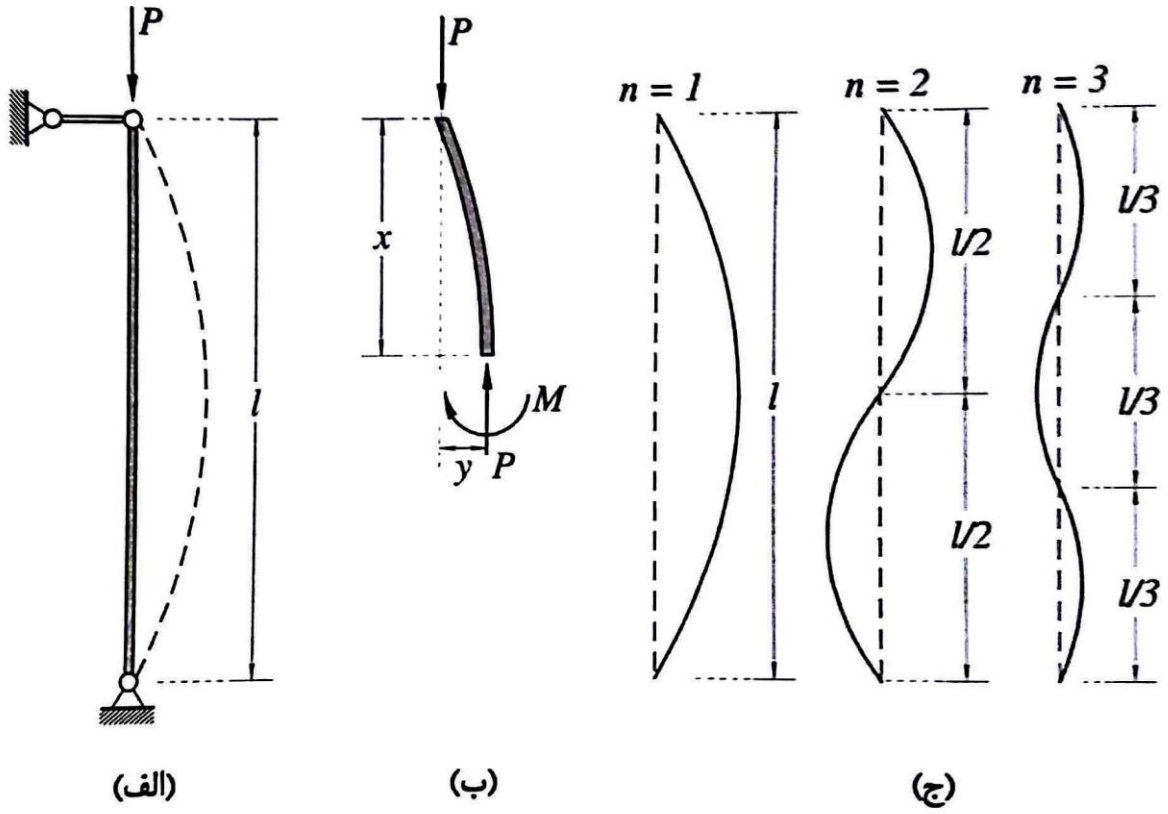
از طرف دیگر اگر طول ستون بیش‌تر باشد و ستون لاغر محسوب شود، با افزایش بار محوری P، تغییرمکان جانبی Δ دیگر قابل صرف‌نظر نبوده و لنگر ثانویهٔ $P\Delta$ و در نتیجه لنگر حداکثر $P(e+\Delta)$ مرتباً به صورت غیر خطی افزایش می‌یابد. در این حالت مسیر $P-M$، منحنی OB را طی می‌کند تا سرانجام در نقطهٔ B و متناظر با بار محوری P_B، منحنی اثر توام بار محوری و لنگر خمشی را قطع کند. این نقطه معرف ترکیب بار محوری P_B و لنگر خمشی $M_{max}=P_B(e+\Delta)$ است که منجر به خرد شدن بتن در محل لنگر حداکثر و خرابی ستون می‌گردد. بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که اگرچه مقطع ستون و خروج از مرکزیت بار تغییر نکرده است، اما لاغری ستون سبب کاهش ظرفیت باربری ستون از P_A به P_B شده است.

اگر ستون کاملاً طویل باشد، افزایش تغییر مکان جانبی ممکن است در حدی باشد که تغییرات لنگر خمشی M با افزایش بار محوری P، مسیر OC را طی کند. در این حالت ستون ناپایدار شده و به دلیل این ناپایداری در بار حداکثر P_c که متناظر با نقطهٔ C است، بدون آن‌که بتن در وجه فشاری مقطع خرد شود، خرابی ستون اتفاق می‌افتد. این وضعیت برای ستون‌های کاملاً لاغر، حتی در حالتی که خروج از مرکزیت اولیهٔ بار برابر $e=0$ باشد، نیز ممکن است اتفاق بیفتد. در این حالت نیز ممکن است با افزایش بار P، قبل از رسیدن به ظرفیت باربری ستون تحت بار محوری خالص (P_0)، ستون به بار بحرانی کمانشی (P_{cr}) برسد و با کمانش ناپایدار گردد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

۱۰-۳ کمانش ستون الاستیک تحت بار محوری خالص

بیش از ۲۵۰ سال پیش، اولر[1] رابطهٔ مشهور خود را برای ستون‌های تحت بار محوری خالص ارائه نمود. این رابطه بر اساس وضعیت تعادلی خنثی در ستون تحت بار محوری که قبل از ناپایداری ستون در اثر کمانش اتفاق می‌افتد، تنظیم می‌شود، شکل ۱۰-۳ وضعیت یک ستون به طول l را تحت بار محوری و به صورت دو سر مفصل که در آستانهٔ کمانش بوده و در وضعیت تعادل خنثی قرار دارد، نشان می‌دهد. اگر نمودار جسم آزاد ستون را برای مقطعی از ستون در فاصلهٔ x از مبدأ و با تغییرمکان جانبی y در نظر بگیریم، با رابطهٔ تعادل، معادلهٔ دیفرانسیل زیر برای ستون تنظیم می‌شود:



شکل ۱۰-۳ *الف) ستون دو سر مفصل در آستانهٔ کمانش و در وضعیت تعادلی خنثی؛ ب) نمودار جسم آزاد قسمتی از ستون؛ ج) حالت‌های کمانشی مختلف (تعداد نیم موج‌های سینوسی)*

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

که A و B ضرایب ثابت بوده و $\lambda^2 = P/EI$ است. با اعمال شرایط مرزی ستون، رابطهٔ زیر برای بار بحرانی ستون به‌دست می‌آید:

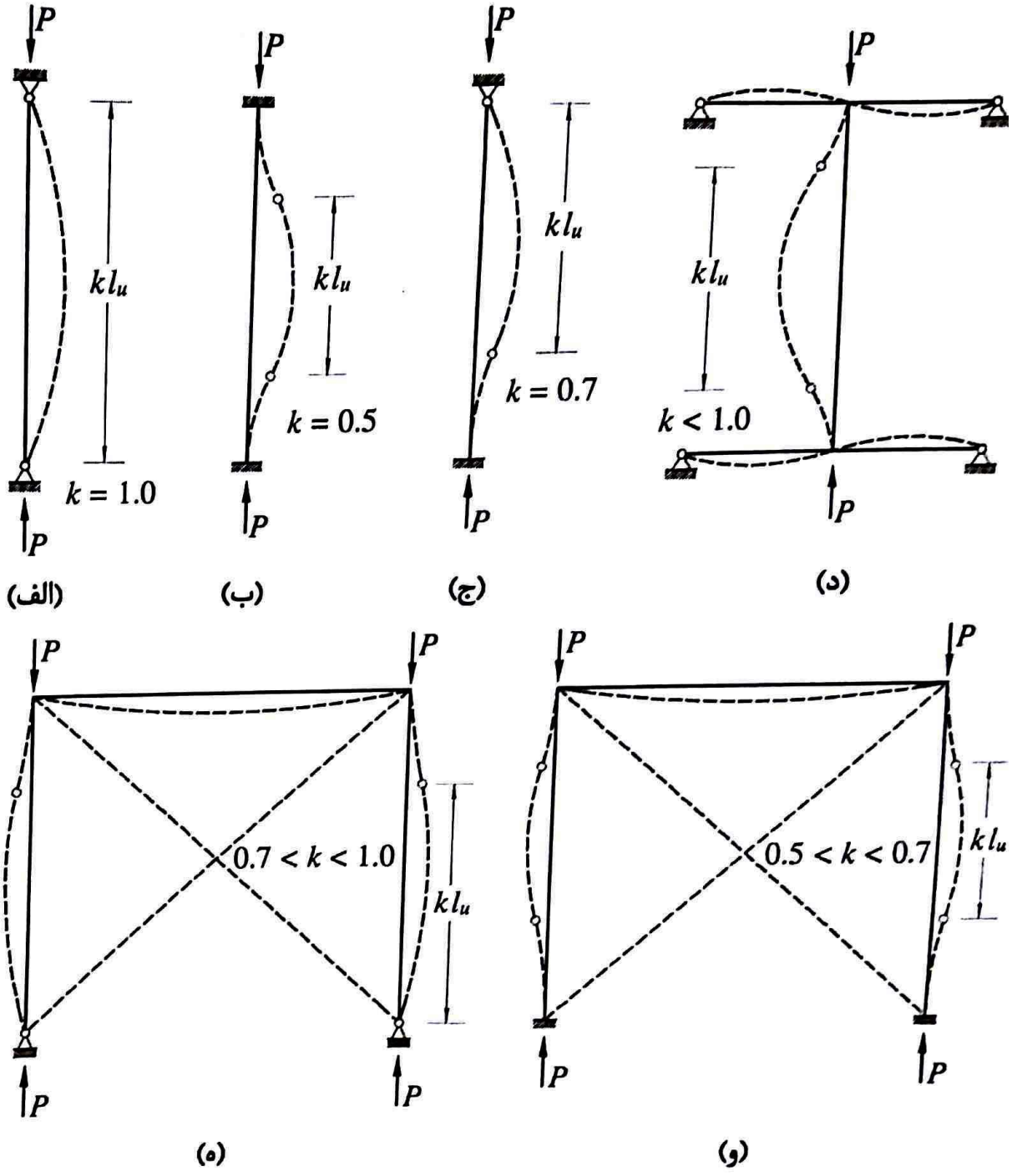
$$P_c = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \qquad (۴-۱۰)$$

که EI سختی خمشی ستون بوده و n تعداد نیم موج سینوسی در طول ستون است. شکل ۱۰-۳ تغییر شکل ستون را در حالتی که ستون در طول خود آزاد باشد $(n=1)$، و نیز تغییر شکل ستون را وقتی که ستون در وسط ارتفاع قادر به حرکت جانبی نباشد $(n=2)$، و یا در یک سوم ارتفاع قادر به حرکت جانبی نباشد $(n=3)$، نشان می‌دهد. کم‌ترین مقدار برای P_c به ازای $n=1$ اتفاق می‌افتد که به بار کمانشی اولر نیز معروف است و به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \qquad (۵-۱۰)$$

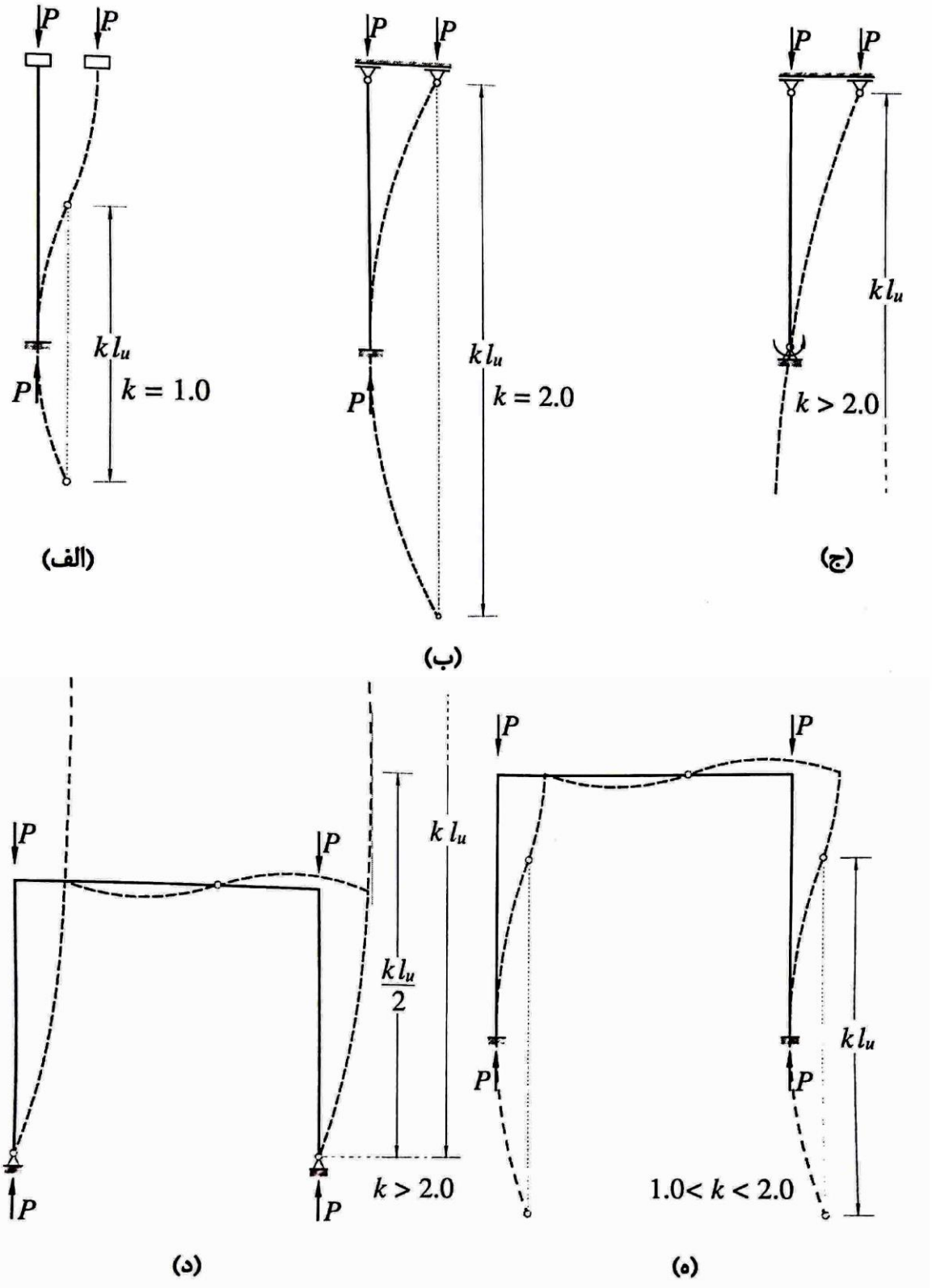
در رابطهٔ فوق، l_u طول آزاد ستون بوده که از روی دال یا تیر پایینی تا زیر دال یا تیر بالایی اندازه‌گیری می‌شود. توجه شود که "طول مؤثر ستون" که از ضرب ضریب طول مؤثر در طول آزاد ستون به‌دست می‌آید $(k \times l_u)$، بیان‌گر آن است که مفصل‌های مجازی در چه طولی از ستون تشکیل می‌شوند. با مقایسهٔ روابط (۱۰-۴) و (۱۰-۶) می‌توان استنتاج کرد که ضریب طول مؤثر را می‌توان به صورت $k = 1/n$ نیز بیان کرد که n تعداد نیم موج‌های سینوسی است که در آستانهٔ کمانش ستون در طول ستون تشکیل می‌شود. ارتباط طول مؤثر kl و n و نیز مفهوم تشکیل مفصل‌های مجازی را می‌توان در شکل ۱۰-۳-ج نیز ملاحظه نمود. ضریب طول مؤثر ستون و موقعیت تشکیل مفصل‌های مجازی برای ستون‌های بدون حرکت جانبی در شکل ۱۰-۴، و برای ستون‌های با حرکت جانبی در شکل ۱۰-۵ و به ازای شرایط مختلف تکیه‌گاهی نشان داده شده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.



شکل ۱۰-۴ *نمایش طول مؤثر ستون بدون حرکت جانبی؛ الف) دو سر مفصل؛ ب) دو سر گیردار؛ ج) یک سر گیردار و یک سر مفصل؛ د) دو سر نیمه گیردار؛ ه)یک سر مفصل و یک سر نیمه گیردار؛ و) یک سر گیردار و یک سر نیمه گیردار*

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.



شکل ۱۰-۵ نمایش طول مؤثر ستون با حرکت جانبی؛ الف) دو سر گیردار؛ ب) یک سر گیردار و یک سر مفصل؛ ج) یک سر نیمه گیردار و یک سر مفصل؛ د) یک سر مفصل و یک سر نیمه گیردار؛ ه) یک سر گیردار و یک سر نیمه گیردار

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

۱۰-۴ محاسبهٔ ضریب طول مؤثر

همان‌طور که در قسمت قبل ذکر شد، طول مؤثر ستون، kl_u، به صورت طول یک ستون معادل دو سر مفصل تعریف می‌شود که بار کمانشی یکسانی با ستون دارد.

شکل‌های ۱۰-۴ و ۱۰-۵، مقادیر ضریب طول مؤثر را برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار یا مفصلی تعیین می‌کنند. با این وجود، در بسیاری از موارد، ستون در یک قاب واقع شده و تعیین ضریب طول مؤثر آن نیاز به محاسبات ویژه دارد.

ضریب طول مؤثر یک ستون الاستیک تابعی از سختی نسبی تیرها و ستون‌های هر انتها از ستون است. سختی نسبی تیر و ستون‌های متصل به هر انتهای یک ستون مشخص با ψ نمایش داده شده و به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\psi = \frac{\sum K_c}{\sum K_b} = \frac{\sum (EI_c / l_c)}{\sum (EI_b / l_b)} \qquad (۷-۱۰)$$

در رابطهٔ فوق K_c و K_b به ترتیب سختی خمشی ستون و تیر هستند. هم‌چنین I_c و I_b ممان اینرسی مقطع ستون و ممان اینرسی مقطع تیر، و l_c و l_b طول ستون و طول تیر هستند که از مرکز تا مرکز گره‌ها اندازه‌گیری می‌شوند. در محاسبهٔ سختی EI جهت جای‌گذاری در رابطهٔ ψ در یک قاب بتن‌آرمه، باید اثرات ترک‌خوردگی اعضاء را در نظر گرفت. بدین منظور می‌توان از مدول الاستیسیتهٔ بتن (E_c) که از رابطهٔ (۲-۷) به صورت $E_c = 4700\sqrt{f'_c}$ محاسبه می‌شود، استفاده کرده و ممان اینرسی اعضاء خمشی تیر را به صورت $0.35I_g$، و ممان اینرسی اعضاء فشاری ستون را به صورت $0.7I_g$ در نظر گرفت؛ که I_g ممان اینرسی ناخالص مقطع ترک نخوردهٔ عضو است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

واضح است که در انتهای کاملاً گیردار ستون $\psi = 0$، و در یک مفصل کامل $\psi = \infty$ است. با این وجود در سازه‌های عملی، اتصال گیردار کامل و یا اتصال مفصلی کامل وجود ندارد. به همین جهت حد پایینی و حد بالایی مناسبی برای ψ به ترتیب ۰/۲ و ۲۰ است. هم‌چنین در ستون‌های واقع در قاب‌های بدون حرکت جانبی و یا قاب‌های با حرکت جانبی، ضریب طول مؤثر k به ترتیب نباید کم‌تر از ۰/۶ و یا ۱/۲ در نظر گرفته شود.

ب- استفاده از روابط تقریبی

برای تعیین ضریب طول مؤثر ستون می‌توان از روابط تقریبی زیر نیز استفاده کرد:

ب-۱ برای ستون‌های مهار بندی شده، حد بالایی ضریب طول مؤثر را می‌توان مقدار کوچک‌تر از دو عبارت زیر در نظر گرفت:

$$k = 0.7 + 0.05(\psi_A + \psi_B) \le 1.0 \qquad (۱۰-۹-\text{الف})$$

$$k = 0.85 + 0.05\psi_{\min} \le 1.0 \qquad (۱۰-۹-\text{ب})$$

در روابط فوق، ψ_A و ψ_B مقادیر کمیت ψ در دو انتهای ستون بوده و $\psi_{\min}$ کوچک‌ترین از دو مقدار ψ_A و ψ_B می‌باشد.

ب-۲ برای اعضاء فشاری بدون مهار بندی که در هر دو انتها مقید باشند، اگر متوسط مقادیر ψ در دو انتهای ستون را با ψ_m مشخص کنیم، ضریب طول مؤثر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{برای } \psi_m < 2 \rightarrow k = \frac{20 - \psi_m}{20}\sqrt{1+\psi_m} \qquad (۱۰-۱۰-\text{الف})$$

$$\text{برای } \psi_m \ge 2 \rightarrow k = 0.9\sqrt{1+\psi_m} \qquad (۱۰-۱۰-\text{ب})$$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

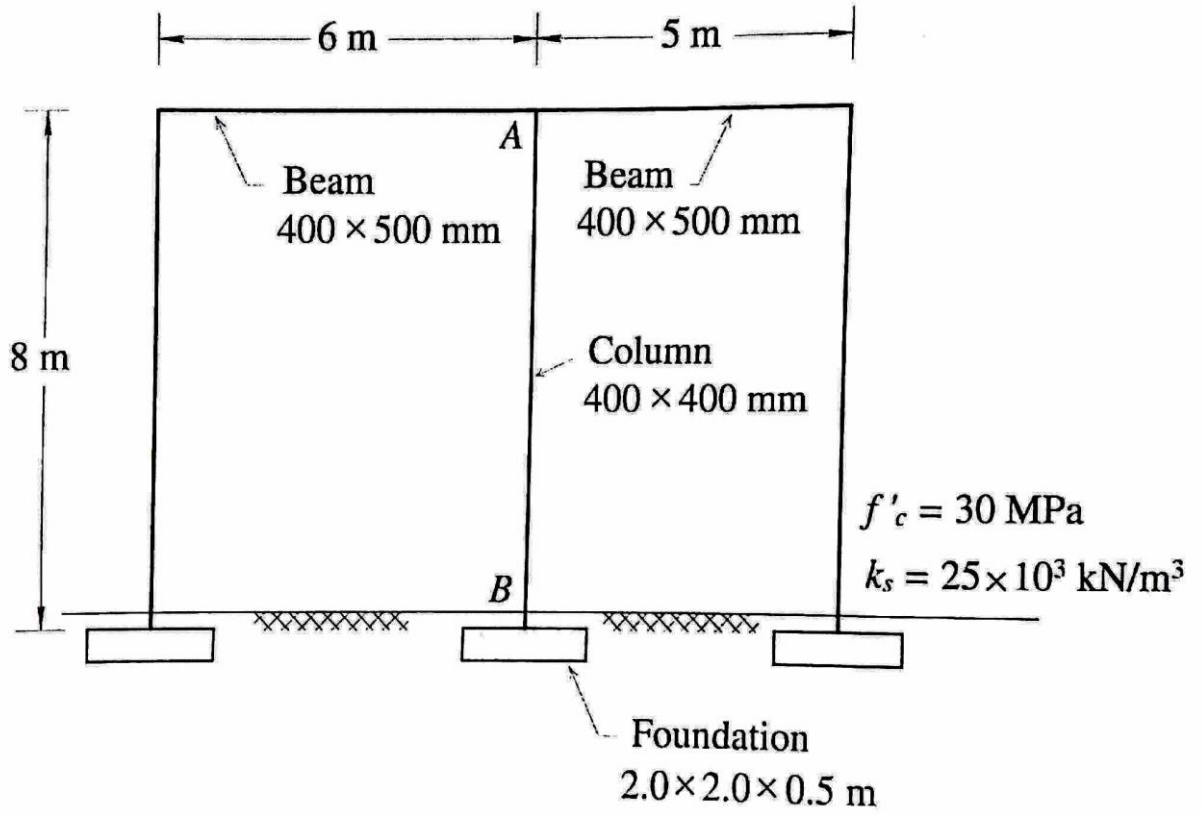
ب-۳ برای اعضاء فشاری بدون مهار بندی که در یک انتها مفصلی و یا آزاد باشند، به فرض آن‌که متغیر ψ را برای نشان دادن سختی نسبی ستون به تیر در انتهای دیگر مورد استفاده قرار دهیم، ضریب طول مؤثر عبارت است از:

$$k = 2.0 + 0.3\psi \qquad (۱۰-۱۱)$$

مثال ۱۰-۱ ستون AB را که در شکل ۱۰-۷ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. ضریب طول مؤثر این ستون را در دو حالت زیر به‌دست آورید:

الف- اگر قاب بدون حرکت جانبی باشد.

ب- اگر قاب در حرکت جانبی آزاد باشد.



شکل ۱۰-۷ *قاب مورد استفاده در مثال ۱۰-۱ و مشخصات تیر، ستون، پی، بتن و خاک زیر پی*

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

حل: با منظور نمودن ترک خوردگی اجزاء، ممان اینرسی برای تیر برابر با $I_b = 0.35 I_g$ و برای ستون برابر $I_c = 0.7 I_g$ در نظر گرفته می‌شود.

$$I_b = 0.35 I_g = 0.35 \times \frac{1}{12} \times (400 \times 500^3) = 1.458 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$I_c = 0.7 I_g = 0.7 \times \frac{1}{12} \times (400 \times 400^3) = 1.493 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\psi_A = \frac{\sum (EI_c / l_c)}{\sum (EI_b / l_b)} = \frac{E_c \times (1.493 \times 10^9 / 8000)}{E_c \times \left[(1.458 \times 10^9 / 5000) + (1.458 \times 10^9 / 6000) \right]}$$
$$= 0.349$$

$$\psi_B = \frac{4E\, I_c / l_c}{I_f k_s} = \frac{4 \times 4700\sqrt{30} \times 1.493 \times 10^9 / 8000}{(1/12)(2000 \times 2000^3) \times (25 \times 10^3) \times 10^{-6}} = 0.577$$

در حالتی که قاب بدون حرکت جانبی باشد، با وارد کردن ψ_A و ψ_B در نموگراف شکل ۶-۱۰-الف، مقدار $k_{AB} = 0.675$ به‌دست می‌آید. در این حالت هم‌چنین می‌توان از روابط (۱۰-۹) استفاده کرد:

$$k_1 = 0.7 + 0.05(\psi_A + \psi_B) = 0.7 + 0.05 \times (0.349 + 0.577)$$
$$= 0.746 < 1.0$$

$$k_2 = 0.85 + 0.05 \psi_{\min} = 0.85 + 0.05 \times 0.349 = 0.867 < 1.0 \quad \checkmark$$

$$k_{AB} = \min\{k_1 , k_2\} = 0.746$$

در این حالت هم‌چنین اگر از جدول ۱۰-۱ استفاده کنیم، چنان‌چه شرایط تکیه‌گاهی بالای ستون را به صورت $\psi_A \approx 0.4$ در نظر بگیریم، با درون‌یابی در اعداد جدول خواهیم داشت:

$$k_{AB} = 0.67 + (0.74 - 0.67) \times \frac{(0.577 - 0.4)}{(1.6 - 0.4)} = 0.68$$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

در همین مثال اگر فرض کنیم قاب در مقابل حرکت جانبی آزاد است، با استفاده از نموگراف شکل ۶-۱۰-ب، مقدار $k_{AB}=1.15$ به‌دست می‌آید. در این حالت نیز می‌توان جهت تعیین ضریب طول مؤثر ستون از روابط تقریبی (۱۰-۱۰) استفاده کرد:

$$\psi_m=\frac{1}{2}(\psi_A+\psi_B)=\frac{1}{2}\times(0.349+0.577)=0.463$$

$$\psi_m<2.0\rightarrow k_{AB}=\frac{20-\psi_m}{20}\sqrt{1+\psi_m}$$

$$k_{AB}=\frac{20-0.463}{20}\times\sqrt{1+0.463}=1.18$$

در این مثال ملاحظه می‌شود که طول مؤثر ستون در حالت با حرکت جانبی، حدود ۷۰ درصد از طول مؤثر آن در حالت بدون حرکت جانبی بزرگ‌تر است.

۱۰-۷ تشدید لنگر ستون بر اساس *ACI* 318-05

ACI 318 جهت منظور نمودن اثر لاغری ستون، یک روش تقریبی طراحی را با استفاده از مفهوم تشدید لنگر ارائه می‌کند. در این روش لنگرهای خمشی که از آنالیز مرتبهٔ اول الاستیک قاب حاصل می‌شوند، در یک ضریب تشدید که تابعی از بار نهایی با ضریب ستون (P_u) و بار بحرانی کمانشی ستون (P_c) است، ضرب می‌گردند. ضریب تشدید لنگر برای ستون‌های بدون حرکت جانبی و ستون‌های با حرکت جانبی به روش مجزا و ویژه محاسبه می‌شود. در ادامه مراحل لازم جهت محاسبهٔ ضریب تشدید لنگر شرح داده می‌شود.

۱-۷-۱ محاسبهٔ نیروهای داخلی ستون

بار محوری با ضریب ستون (P_u) و هر یک از دو لنگر انتهایی با ضریب ستون (M_1:

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

لنگر کوچک‌تر؛ M_2: لنگر بزرگ‌تر) و نیز تغییر شکل جانبی نسبی طبقه (Δ_0: تغییر شکل جانبی نسبی بین بالا و پایین طبقه تحت تأثیر برش افقی با ضریب در طبقه) را می‌توان بر اساس آنالیز الاستیک مرتبهٔ اول قاب تعیین کرد. در این آنالیز لازم است به طور مناسب تأثیر بارهای محوری، تأثیر نواحی ترک خورده در اعضاء و نیز تأثیر طول زمان بارگذاری در خصوصیات مقطع اعضاء در نظر گرفته شود. بدین منظور می‌توان برای انجام آنالیز الاستیک مرتبهٔ اول، خصوصیات زیر را برای اعضاء بتن‌آرمه به کار برد:

الف- مدول الاستیسیته: مدول الاستیسیتهٔ اعضاء بتن‌آرمه را می‌توان معادل مدول الاستیسیتهٔ تعریف شده برای بتن بر اساس رابطهٔ (۲-۷) به صورت $E_c = 4700\sqrt{f_c'}$ به کار برد.

ب- ممان اینرسی؛ ممان اینرسی اعضاء مختلف قاب را می‌توان به صورت زیر انتخاب کرد:

۱- تیرها: $I = 0.35 I_g$

۲- ستون‌ها: $I = 0.70 I_g$

۳- دیوارها؛ - به صورت ترک نخورده: $I = 0.70 I_g$

- به صورت ترک خورده: $I = 0.35 I_g$

۴- صفحات و دال‌های تخت: $I = 0.25 I_g$

در عبارت‌های فوق، I_g ممان اینرسی مقطع ناخالص بتن (بدون کم کردن سطح مقطع فولاد) است. در مورد تیرهای T شکل، I_g باید بر اساس عرض مؤثر تعریف شده در فصل ۶ محاسبه شود. در این مورد هم‌چنین می‌توان ممان اینرسی مقطع T شکل را دو برابر ممان اینرسی جان در نظر گرفت ($I_g = 2 \times b_w h^3 / 12$).

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

ج- سطع مقطع: سطح مقطع اعضاء بتن‌آرمه در آنالیز الاستیک مرتبهٔ اول قاب را می‌توان برابر با سطع مقطع ناخالص عضو در نظر گرفت ($A = 1.0A_g$).

د- شعاع ژیراسیون: شعاع ژیراسیون اعضاء فشاری را می‌توان معادل شعاع ژیراسیون مقطع ناخالص بتن در نظر گرفت ($r = \sqrt{I_g / A_g}$). در مورد اعضاء فشاری مستطیلی می‌توان از رابطهٔ $r = 0.3h$ (h بعد مقطع در راستایی است که پایداری مورد بررسی قرار می‌گیرد)، و در مورد اعضاء فشاری دایروی از رابطهٔ $r = 0.25D$ (D قطر دایره است) استفاده کرد.

۱۰-۷-۲ تعریف قاب بدون حرکت جانبی و یا با حرکت جانبی

قاب بدون حرکت جانبی[۱] معادل قاب مهار بندی شده[۲]، و قاب با حرکت جانبی[۳] معادل قاب مهار بندی نشده[۴] است. یک قاب را در صورتی می‌توان در یک جهت مشخص مهار بندی شده در نظر گرفت، که پایداری جانبی کل سازه توسط دیوارها، بادبندها و یا هر گونه مهاری تأمین شود، که برای مقاومت در مقابل تمام نیروهای جانبی در آن جهت طراحی شده‌اند. هم‌چنین یک قاب را در صورتی می‌توان در یک جهت مشخص کاملاً مهار بندی نشده در نظر گرفت، که در آن جهت تمام مقاومت در مقابل بارهای جانبی از رفتار خمشی ستون‌ها حاصل شود.

در واقع یک قاب کاملاً مهار بندی شده وجود ندارد و مرز کاملاً مشخصی بین قاب مهار بندی شده و قاب بدون مهار بندی نمی‌توان در نظر گرفت. بعضی از قاب‌ها به طور واضح مهار بندی نشده هستند؛ نظیر قاب‌هایی که در شکل ۱۰-۵-د و ه نشان داده شدند. از طرفی بعضی از قاب‌ها به دیوارهای برشی، بادبندها، دیوارهای آسانسور و غیره متصل شده‌اند؛ ولی از آن‌جا که هیچ دیواری به طور کامل صلب نیست، همواره در یک قاب مهار بندی شده، مقداری حرکت جانبی هم وجود دارد که سبب ایجاد لنگرهای ثانویهٔ $P.\Delta$ در ستون‌ها می‌شود.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

برای مقاصد طراحی، یک طبقه و یا یک قاب را در صورتی می‌توان مهار بندی شده در نظر گرفت که تغییر شکل جانبی آن سبب کاهش ظرفیت باربری قائم سازه به مقدار قابل ملاحظه نگردد. *ACI* 318 اجازه می‌دهد که یک ستون در یک سازه و در یک راستای مشخص، در صورتی که افزایش در لنگرهای خمشی انتهایی ستون بر اساس تأثیرات مرتبهٔ دوم، بیش از ۵ درصد نسبت به لنگرهای انتهایی مرتبهٔ اول نباشد، بدون حرکت جانبی فرض شود.

ACI 318 هم‌چنین اجازه می‌دهد که اگر شاخص پایداری یک طبقه[1] در یک راستای مشخص (Q) کوچک‌تر یا مساوی ۰/۰۵ باشد، آن طبقه از قاب در آن راستا بدون حرکت جانبی فرض شود. شاخص پایداری طبقه در یک راستا از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$Q = \frac{\sum P_u \Delta_0}{V_{us} l_c} \qquad (۱۰-۱۷)$$

در رابطهٔ فوق، $\sum P_u$ و V_{us} به ترتیب مجموع بار قائم و برش افقی طبقه هستند که بر اساس بارهای با ضریب به‌دست آمده‌اند. هم‌چنین Δ_0 تغییر مکان نسبی مرتبهٔ اول طبقه است که بر اساس اختلاف تغییر مکان جانبی بالا و پایین طبقه ناشی از تأثیر V_{us} ایجاد می‌شود. Δ_0 را می‌توان بر اساس آنالیز الاستیک مرتبهٔ اول قاب تحت بارهای با ضریب و مبتنی بر مقادیر سختی که در بخش ۱۰-۷-۱ ذکر شد، محاسبه کرد. در رابطهٔ (۱۰-۱۷) هم‌چنین l_c طول عضو فشاری است که از مرکز تا مرکز گره‌های قاب اندازه‌گیری می‌شود. در محاسبهٔ Q، $\sum P_u$ باید از آن ترکیب بارگذاری جانبی انتخاب شود که مقدار $\sum P_u$ بزرگ‌تری حاصل می‌کند. یک قاب می‌تواند شامل طبقات بدون حرکت جانبی با $Q \le 0.05$، و طبقات با حرکت جانبی با $Q > 0.05$ باشد. چنانچه $V_{us} = 0$ باشد، کنترل رابطهٔ (۱۰-۱۷) روش مناسبی برای تعیین حرکت جانبی طبقه محسوب نمی‌شود.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

۱۰-۷-۳ لنگر تشدید یافته در ستون بدون حرکت جانبی

برای محاسبهٔ لنگر تشدید یافته در اعضاء فشاری واقع در قاب‌های بدون حرکت جانبی، لازم است ضریب طول مؤثر k تعیین شود. بر اساس *ACI* 318، ضریب طول مؤثر ستون واقع در قاب بدون حرکت جانبی را می‌توان برابر ۱/۰ در نظر گرفت. هم‌چنین می‌توان برای k مقدار کوچک‌تری با استفاده از نمودارهای تنظیمی جکسون و مورلند، و یا روابط تقریبی ارائه شده در بخش ۱۰-۴، به‌دست آورد.

در یک ستون واقع در قاب بدون حرکت جانبی، به شرط برقراری رابطهٔ زیر می‌توان از اثرات لاغری صرف‌نظر نموده و لنگرهای انتهایی ستون را بدون تشدید در طراحی منظور نمود:

$$\frac{kl_u}{r} \le 34 - 12\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \qquad (۱۰-۱۸)$$

در این رابطه عبارت $34-12(M_1/M_2)$ نباید بزرگ‌تر از ۴۰ در نظر گرفته شود. M_1 و M_2 در رابطهٔ (۱۰-۱۸) به ترتیب لنگرهای کوچک‌تر و بزرگ‌تر با ضریب در دو انتهای ستون هستند؛ این لنگرهای انتهایی اگر در ستون ایجاد انحناء یک طرفه کنند، نسبت M_1/M_2 مثبت؛ و اگر ایجاد انحناء دو طرفه کنند، نسبت M_1/M_2 منفی در نظر گرفته می‌شود. هم‌چنین l_u در رابطهٔ (۱۰-۱۸) طول آزاد عضو فشاری بوده و به صورت فاصلهٔ بین دال طبقات، تیرها، سر ستون و یا سایر اعضایی که در جهت مورد نظر می‌توانند قید جانبی فراهم کنند، منظور می‌شود.

اگر رابطهٔ (۱۰-۱۸) برقرار نباشد، اثر لاغری قابل صرف‌نظر نبوده و لازم است لنگر ستون تشدید شود و ستون برای بار محوری با ضریب P_u و لنگر تشدید شدهٔ

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

M_c طراحی گردد. لنگر تشدید شده از ضرب لنگر بزرگ‌تر از دو لنگر انتهایی ستون در ضریب تشدید لنگر برای ستون بدون حرکت جانبی (δ_{ns}) به‌دست می‌آید:

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \qquad (۱۰-۱۹)$$

که؛

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_c}} \geq 1.0 \qquad (۱۰-۲۰)$$

توجه شود که رابطهٔ (۱۰-۲۰)، مشابه رابطهٔ (۱۰-۱۵) است که قبلاً به عنوان ضریب تشدید لنگر به‌دست آمد. در بخش ۱۰-۵ استدلال شد که در حالتی که بار جانبی در طول ستون اثر کند، $C_m \approx 1.0$ خواهد بود. به همین دلیل *ACI* 318 قید می‌کند که اگر بین تکیه‌گاه‌های ستون بار جانبی اثر کرده باشد، $C_m = 1.0$ در نظر گرفته می‌شود. در حالتی که بین تکیه‌گاه‌های ستون باری اثر نکرده باشد و ستون فقط لنگرهای انتهایی داشته باشد، رابطهٔ زیر توسط *ACI* 318 جهت تعیین C_m (ضریب تصحیح لنگر معادل) ارائه شده است. در حقیقت در استخراج رابطهٔ تشدید لنگر (رابطهٔ ۱۰-۱۵)، فرض شده است که لنگر حداکثر در وسط یا نزدیکی وسط ستون ایجاد می‌شود. اگر لنگر حداکثر در یکی از دو انتهای ستون باشد، طراحی باید بر اساس یک لنگر معادل یکنواخت به صورت $C_m M_2$ صورت گیرد، که پس از تشدید به لنگر حداکثری که در جایی به جز وسط ستون تشکیل می‌شود، منجر شود.

$$C_m = 0.6 + 0.4\frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \qquad (۱۰-۲۱)$$

در این رابطه نیز نسبت M_1/M_2 وقتی مثبت در نظر گرفته می‌شود که ستون با انحناء یک طرفه خم شود.

کمیت P_c در رابطهٔ (۱۰-۲۰)، بار بحرانی کمانشی ستون است که از رابطهٔ (۱۰-۶) به صورت $P_c = \pi^2 EI/(kl_u)^2$ محاسبه می‌شود. در تعیین بار بحرانی کمانشی، انتخاب سختی EI به‌طوری که به‌صورت منطقی، تغییرات ناشی از ترک خوردگی، خزش و رفتار غیر خطی منحنی تنش-کرنش بتن را تقریب بزند، یک مسألهٔ اساسی است. بدین منظور *ACI* 318 رابطهٔ (۱۰-۲۲)، و یا رابطهٔ ساده‌تر (۱۰-۲۳) را پیشنهاد کرده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

$$EI = \frac{0.2E_cI_g + E_sI_{se}}{1+\beta_d} \qquad (۱۰-۲۲)$$

$$EI = \frac{0.4E_cI_g}{1+\beta_d} \qquad (۱۰-۲۳)$$

در رابطهٔ (۱۰-۲۲)، E_s و I_{se} به ترتیب مدول الاستیسیتهٔ فولاد و ممان اینرسی فولادها نسبت به محور مرکزی سطح مقطع عضو است. هم‌چنین β_d در روابط فوق جهت منظور کردن اثرات خزش بر بتن و فولاد تحت بارهای دائمی وارد شده است. برای قاب‌های بدون حرکت جانبی، β_d به صورت نسبت حداکثر بار محوری با ضریب دائمی به حداکثر بار محوری با ضریب در نظر گرفته می‌شود. کل بار مرده و احتمالاً درصدی از بار زنده می‌تواند به عنوان بار دائمی در سازه منظور شود. شرح *ACI* 318 قید می‌کند که جهت ساده سازی بیش‌تر، می‌توان با فرض $\beta_d = 0.6$، رابطهٔ (۱۰-۲۳) را به رابطهٔ تقریبی‌تر زیر تبدیل نمود:

$$EI = 0.25E_cI_g \qquad (۱۰-۲۴)$$

قابل توجه است که ضریب ۰/۷۵ که در رابطهٔ (۱۰-۲۰) اضافه شده، در حقیقت یک ضریب کاهش سختی $\phi_K = 0.75$ است؛ این ضریب به منظور ملاحظهٔ تغییرات در سختی EI عضو فشاری بتن‌آرمه و تأثیر آن در محاسبهٔ تشدید لنگر وارد شده است.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

مثال ۱۰-۲ نتایج حاصل از آنالیز الاستیک مرتبهٔ اول در یک قاب بتن‌آرمهٔ مهار بندی شده تحت بار قائم، نشان می‌دهد که ستونی با طول آزاد $l_u = 4.0\,\text{m}$، تحت بار قائم با ضریب $P_u = 1200\,\text{kN}$ و لنگرهای انتهایی با ضریب و با انحناء یک طرفه برابر با $M_{1u} = 50\,\text{kN.m}$ و $M_{2u} = 65\,\text{kN.m}$ قرار گرفته است. نتایج تحلیل هم‌چنین نشان می‌دهد که بار محوری مردهٔ بدون ضریب ستون برابر با $P_D = 550\,\text{kN}$ است. ضریب طول مؤثر ستون با استفاده از نموگراف‌های طراحی برابر با $k = 0.85$ به‌دست آمده است. با استفاده از بتن و فولاد با مشخصات $f'_c = 35\,\text{MPa}$ و $f_y = 420\,\text{MPa}$، یک مقطع مربعی با فولاد گذاری در دو وجه موازی محور خمش برای ستون، طراحی کنید.

حل: ابتدا با استفاده از رابطهٔ ۹-۳۳-الف و با فرض ۱/۵ درصد فولاد، حداقل سطح مقطع لازم برای ستون را محاسبه می‌کنیم:

$$A_{g\,(\text{trial})} = \frac{P_u}{0.44(f'_c + \rho_t f_y)} = \frac{1200\times10^3}{0.44\times(35+0.015\times420)}$$

$$= 66036\,\text{mm}^2\,(257\times257\,\text{mm})$$

چون خروج از مرکزیت بار $e = M_2/P_u = 54\,\text{mm}$ چندان زیاد نیست، لازم نیست که ابعاد انتخابی برای مقطع نسبت به حداقل ابعاد به‌دست آمده خیلی بزرگ‌تر باشد؛ بنابراین:

Try $300\times300\,\text{mm}$

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{0.85\times4000}{0.3\times300} = 37.8 > 34-12\times\left(\frac{M_1}{M_2}\right) = 34-12\left(\frac{50}{65}\right) = 24.8$$

بنابراین لاغری ستون قابل صرف‌نظر نبوده و باید در محاسبات وارد شود. برای تعیین ضریب تشدید لنگر به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\beta_d = \frac{1.2P_D}{1.2P_D + 1.6P_L} = \frac{1.2\times550}{1200} = 0.55$$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

$$EI=\frac{0.4E_cI_g}{1+\beta_d}=\frac{0.4\times4700\sqrt{35}\times(1/12)(300)^4}{1+0.55}=4.844\times10^{12}\ \text{N.mm}^2$$

$$P_c=\frac{\pi^2EI}{(kl_u)^2}=\frac{\pi^2\times4.844\times10^{12}}{(0.85\times4000)^2}=4135.7\times10^3\ \text{N}$$

$$C_m=0.6+0.4\frac{M_1}{M_2}=0.6+0.4\times\frac{50}{65}=0.908$$

$$\delta_{ns}=\frac{C_m}{1-\dfrac{P_u}{0.75P_c}}=\frac{0.908}{1-\dfrac{1200}{0.75\times4135.7}}=1.48$$

$$M_{2,\min}=P_u(15+0.03h)=1200\times10^3\times(15+0.03\times300)$$
$$=28.8\times10^6\ \text{N.mm}$$

$$M_2=65\,\text{kN.m}>M_{2,\min}=28.8\,\text{kN.m}\quad\checkmark$$

$$M_c=\delta_{ns}M_2=1.48\times65=96.2\,\text{kN.m}$$

طراحی ستون را می‌توانیم با استفاده از نمودارهای طراحی ستون انجام دهیم. اگر فرض کنیم تنگ بستهٔ ستون از $\Phi10$ و فولاد طولی آن از $\Phi20$ انتخاب شود، با منظور کردن 40 mm پوشش روی بیرونی‌ترین فولاد، داریم:

$$\gamma=\frac{300-2\times(40+10+20/2)}{300}=0.6$$

با استفاده از شکل پ۱-۲۵ از نمودارهای طراحی پیوست ۱ خواهیم داشت:

$$K_n=\frac{P_n}{f_c'A_g}=\frac{P_u}{\phi f_c'A_g}=\frac{1200\times10^3}{0.65\times35\times300^2}=0.59$$

$$R_n=\frac{M_n}{f_c'A_gh}=\frac{M_u}{\phi f_c'A_gh}=\frac{96.2\times10^6}{0.65\times35\times300^2\times300}=0.157$$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

شکل پ۱-۲۵ $\rightarrow \underline{\rho_t = 0.025}$ $\underline{\text{O.K.}}$

$$A_{st} = \rho_t bh = 0.025 \times 300^2 = 2250\,\text{mm}^2$$

$\rightarrow \underline{\text{USE } 8\Phi 20}$ (در دو وجه موازی محور خمش)

توجه شود که در استفاده از نمودار، فرض شده است که $\phi = 0.65$ باشد؛ این فرض با توجه به این که نقطهٔ مربوطه روی نمودار، بیان‌گر $f_s < f_y$ می‌باشد، تأیید شده است.

مثال ۱۰-۳ ستون با مقطع مربعی $400 \times 400\,\text{mm}$ و با $8\Phi 24$ که در چهار وجه ستون قرار گرفته‌اند را در نظر بگیرید. طول آزاد ستون $5.0\,\text{m}$، ضریب طول مؤثر ستون برابر $k = 0.9$ و ضریب خزش $\beta_d = 0.5$ محاسبه شده است. میزان باربری ستون در خروج از مرکزیت $e = 300\,\text{mm}$ را تعیین کنید. فرض کنید $f_c' = 28\,\text{MPa}$ و $f_y = 420\,\text{MPa}$ بوده و از حرکت جانبی ستون ممانعت به عمل آمده باشد.

حل:

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{0.9 \times 5000}{0.3 \times 400} = 37.5 > 34 - 12 \times 1 = 22$$

بنابراین لاغری در محاسبات منظور می‌گردد. از آن‌جا که در این مرحله به دلیل مشخص نبودن P_u نمی‌توان ضریب تشدید لنگر δ_{ns} را تعیین کرد، ابتدا ظرفیت باربری ستون را بدون اثر لاغری به‌دست می‌آوریم:

$$A_{st} = 8 \times \pi \times (24)^2 / 4 = 3619\,\text{mm}^2$$

$$\rho_t = \rho_g = A_{st} / A_g = \frac{3619}{(400 \times 400)} = 0.0226$$

$$\gamma = \frac{400 - 2(40 + 10 + 24/2)}{400} = 0.69 \approx 0.7$$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

با $\gamma = 0.7$ و f_c' و f_y این مثال، شکل پ۱-۶ از نمودارهای پیوست ۱ با شرایط این مثال سازگار خواهد بود. در این مثال نسبت e/h برابر $e/h = 300/400 = 0.75$ است. از آن‌جا که در نمودارهای طراحی نسبت محور افقی به محور قائم $R_n/K_n = e/h$ است، می‌توان با پیدا کردن نقطه‌ای با مختصات $K_n = 0.4$ و $R_n = 0.3$ در شکل پ۱-۶ و وصل آن به مبدأ، خط مورب $e/h = 0.75$ را ایجاد نمود. از برخورد این خط با منحنی مربوط به $\rho_g = 0.023$، مقدار $K_n = 0.23$ و $\varepsilon_t \approx 0.0035$ برداشت می‌شود.

$$K_n = \frac{P_n}{f_c' A_g} \rightarrow P_n = K_n f_c' A_g = 0.23 \times 28 \times 400^2 = 1030.4 \times 10^3 \text{ N}$$

$$\varepsilon_t = 0.0035 \rightarrow \phi = 0.483 + 83.3\varepsilon_t = 0.775$$

$$P_u = \phi P_n = 798.6 \text{ kN}$$

حال با این نتایج به محاسبات مربوط به لاغری ستون می‌پردازیم. برای تعیین I_{se}، ضریب C_1 را از جدول ۱۰-۳ و برای ستون مربعی با ۸ عدد میلگرد در وجوه ستون، به مقدار $C_1 = 0.187$ به‌دست می‌آوریم.

$$I_{se} = C_1 A_{st} \gamma^2 h^2 = 0.187 \times 3619 \times 0.69^2 \times 400^2 = 5.155 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$EI = \frac{0.2E_c I_g + E_s I_{se}}{1+\beta_d}$$

$$= \frac{0.2 \times (4700\sqrt{28}) \times (400^4/12) + 200 \times 10^3 \times 5.155 \times 10^7}{1+0.5}$$

$$EI = 1.395 \times 10^{13} \text{ N.mm}^2$$

توجه شود که اگر برای تعیین EI از رابطهٔ (۱۰-۲۳) نیز استفاده شده بود، $EI = 1.415 \times 10^{13} \text{ N.mm}^2$ به‌دست می‌آمد که با مقدار قبلی کم‌تر از ۱/۵ درصد اختلاف داشت.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

$$P_c=\frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2}=\frac{\pi^2\times1.395\times10^{13}}{(0.9\times5000)^2}=6799\times10^3\ \text{N}$$

$$C_m=0.6+0.4\frac{M_1}{M_2}=0.6+0.4\times1=1.0$$

$$\delta_{ns}=\frac{C_m}{1-\dfrac{P_u}{0.75P_c}}=\frac{1.0}{1-\dfrac{798.6\times10^3}{0.75\times6799\times10^3}}=1.186$$

$$M_c=\delta_{ns}M_2\ \rightarrow\ e_c=\delta_{ns}e=1.186\times300=355.8\,\text{mm}$$

منظور از e_c در روابط فوق، خروج از مرکزیت متناظر با لنگر تشدید یافته است. چون $e/h=355.8/400=0.89$ است، در شکل پ۱-۶ نقطه‌ای با مختصات $R_n=0.4$ و $K_n=0.45$ را به مبدأ وصل می‌کنیم تا معرف $e/h=0.89$ باشد. از تقاطع این خط مورب با منحنی مربوط به $\rho_g=0.023$، مقدار $K_n=0.21$ و $\varepsilon_t\approx0.0035$ برداشت می‌شود.

$$P_n=K_n f_c' A_g=0.21\times28\times400^2=940.8\times10^3\ \text{N}$$

$$P_u=\phi P_n=0.775\times940.8=\underline{\underline{729.1\text{kN}}}$$

اگر مجدداً δ_{ns} را حساب کنیم، مقدار $\delta_{ns}=1.167$ به‌دست می‌آید که با مقدار قبلی کم‌تر از ۲ درصد متفاوت است؛ بنابراین حل با تقریب قابل قبولی همگرا شده است و P_u به‌دست آمده جواب مسأله است.

۱۰-۷-۴ لنگر تشدید یافته در ستون با حرکت جانبی

برای محاسبهٔ لنگر تشدید یافته در ستون واقع در قاب با حرکت جانبی نیز لازم است ابتدا ضریب طول مؤثر k تعیین شود. بدین منظور می‌توان با به کارگیری مقادیری که در بخش ۱۰-۷-۱ برای متغیرهای E و I در یک عضو بتن‌آرمه ذکر شد، مقدار k را با استفاده از نمودارهای تنظیمی جکسون و مورلند (شکل ۶-۱۰-ب)، و یا به کمک روابط تقریبی که در بخش ۱۰-۴ ذکر شد، تعیین کرد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

در ستون واقع در قاب با حرکت جانبی به شرط برقراری رابطهٔ (۱۰-۲۷) می‌توان از اثر لاغری در محاسبات صرف‌نظر نموده و لنگر ستون را به صورت تشدید نشده در طراحی به کار برد:

$$\frac{kl_u}{r} < 22.0 \qquad (۱۰-۲۷)$$

در صورتی که رابطهٔ فوق برقرار نباشد، اثر لاغری قابل صرف‌نظر نبوده و لنگر ستون باید تشدید شود. بر اساس ACI 318 جهت تشدید لنگر در ستون با حرکت جانبی، ابتدا لازم است در ترکیب بارگذاری مورد استفاده، آن قسمت از لنگر با ضریب که تغییر شکل جانبی قابل ملاحظه‌ای ایجاد نمی‌کند (M_{ns})، از قسمتی از لنگر با ضریب که تغییر شکل جانبی قابل ملاحظه‌ای ایجاد می‌کند (M_s)، تفکیک شود. واضح است که M_{ns} اجزاء مرتبط با بارهای قائم را در ترکیب بارگذاری مورد نظر در بر می‌گیرد؛ در حالی که M_s شامل اجزاء مرتبط با بار جانبی در ترکیب بارگذاری مورد نظر است. لازم به ذکر است که در آیین‌نامه تفسیر روشنی از محدودهٔ "تغییر شکل جانبی قابل ملاحظه" ارائه نشده است؛ اگرچه در نسخه‌های قدیمی‌تر شرح آیین‌نامه، از تغییر شکل جانبی تحت بارهای با ضریب به میزان $\Delta \le (1/500)H$، به عنوان تغییر شکل جانبی غیر قابل ملاحظه یاد شده بود (H ارتفاع طبقه است).

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

جهت تعیین لنگرهای با ضریب دو انتهای ستون با حرکت جانبی، *ACI* 318 با تشدید M_s و جمع آن با M_{ns}، روابط زیر را ارائه می‌کند:

$$M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s} \qquad \text{(الف-۲۸-۱۰)}$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \qquad \text{(ب-۲۸-۱۰)}$$

که M_1 و M_2 به ترتیب لنگر کوچک‌تر و لنگر بزرگ‌تر از دو لنگر انتهایی ستون هستند که در آن‌ها تأثیر حرکت جانبی قاب تحت بار جانبی و تشدید لنگر انتهایی ناشی از بار جانبی با ضریب، منظور شده است. در روابط فوق، M_{1ns} و M_{2ns} به ترتیب لنگرهای با ضریب ناشی از آنالیز الاستیک مرتبهٔ اول قاب تحت بارهایی که تغییر شکل جانبی قابل ملاحظه‌ای ایجاد نمی‌کنند (بارهای قائم)، در طرفی از ستون که M_1 و M_2 محاسبه می‌شوند، می‌باشند. هم‌چنین M_{1s} و M_{2s} با آنالیز الاستیک مرتبهٔ اول قاب و تحت بارهای با ضریبی که تغییر شکل جانبی قابل ملاحظه ایجاد می‌کنند، حاصل شده‌اند و به ترتیب مربوط به انتهایی از ستون هستند که M_1 و M_2 محاسبه می‌شوند.

برای تعیین عبارت $\delta_s M_s$ در روابط (۲۸-۱۰)، *ACI* 318 سه روش را به شرح زیر ارائه کرده است:

۱- لنگرهای تشدید شدهٔ همراه با حرکت جانبی ($\delta_s M_s$) را مستقیماً می‌توان بر اساس انجام یک آنالیز الاستیک مرتبهٔ دوم و با به کارگیری مقادیری که در بخش ۱-۷-۱۰ برای E و I ذکر شد، به‌دست آورد. در این روش لازم نیست ضریب تشدید لنگر بار جانبی (δ_s) جداگانه حساب شود.

۲- در صورتی که شاخص پایداری Q تعیین شده باشد، ضریب تشدید δ_s را می‌توان به صورت زیر تعیین نمود:

$$\delta_s = \frac{1}{1-Q} \geq 1.0 \qquad (۲۹-۱۰)$$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

این روش وقتی معتبر است که $\delta_s \leq 1.5$ باشد؛ در غیر این صورت باید از یکی از دو روش دیگر استفاده شود.

۳- ضریب تشدید δ_s را می‌توان از رابطهٔ زیر تعیین کرد:

$$\delta_s = \frac{1}{1-\frac{\sum P_u}{0.75\sum P_c}} \geq 1.0 \qquad (۳۰-۱۰)$$

در این رابطه $\sum P_u$ جمع تمام بارهای قائم در طبقه، و $\sum P_c$ جمع بارهای بحرانی کمانشی تمام ستون‌هایی از طبقه است که در مقابل حرکت جانبی مقاومت می‌کنند. در محاسبهٔ P_c هر ستون برای محاسبهٔ $\sum P_c$، باید از ضریب طول مؤثر (k) مربوط به قاب با حرکت جانبی استفاده کرده و EI را از روابط (۱۰-۲۲) یا (۱۰-۲۳) تعیین نمود. در رابطهٔ (۱۰-۳۰) نیز ضریب $\phi_K = 0.75$، ضریب کاهش سختی است که به منظور ملاحظهٔ تغییرات سختی EI و تأثیر آن در تشدید لنگر وارد شده است.

ضریب خزش β_d در قاب با حرکت جانبی، به صورت نسبت حداکثر برش دائمی با ضریب در طبقه به حداکثر برش با ضریب در طبقه تعریف می‌شود. از آن‌جا که در اکثر موارد بارهایی که سبب حرکت جانبی می‌شوند، دائمی نیستند، در قاب‌های با حرکت جانبی غالباً $\beta_d = 0$ است. موارد استثنایی نظیر حالت‌هایی است که یک قاب در مقابل فشار جانبی خاک یا آب مقاومت می‌کند؛ و یا قاب در مقابل عکس‌العمل افقی یک سقف قوسی قرار گرفته است. در حالتی که بار جانبی دائمی بر قاب مهار بندی نشده اثر می‌کند، تغییر شکل جانبی قاب با گذشت زمان افزایش یافته که مستقیماً باعث افزایش لنگر $P\Delta$ می‌شود. این وضعیت نسبت به تغییرات جزئی در خصوصیات ماده و یا بارگذاری بسیار حساس است؛ بنابراین در سازه‌هایی که تحت بارهای جانبی دائمی قرار می‌گیرند، باید حتی‌المقدور از سیستم مهار بندی استفاده شود.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

در پایان این قسمت به طور خلاصه مراحلی که باید در بررسی لاغری ستون‌های واقع در قاب‌های با حرکت جانبی طی شود، ذکر می‌گردد:

۱- تعیین ضریب طول مؤثر ستون با استفاده از نموگراف و یا روابط تقریبی؛

۲- کنترل ضرورت وارد کردن لاغری در محاسبات با استفاده از رابطهٔ (۱۰-۲۷)؛

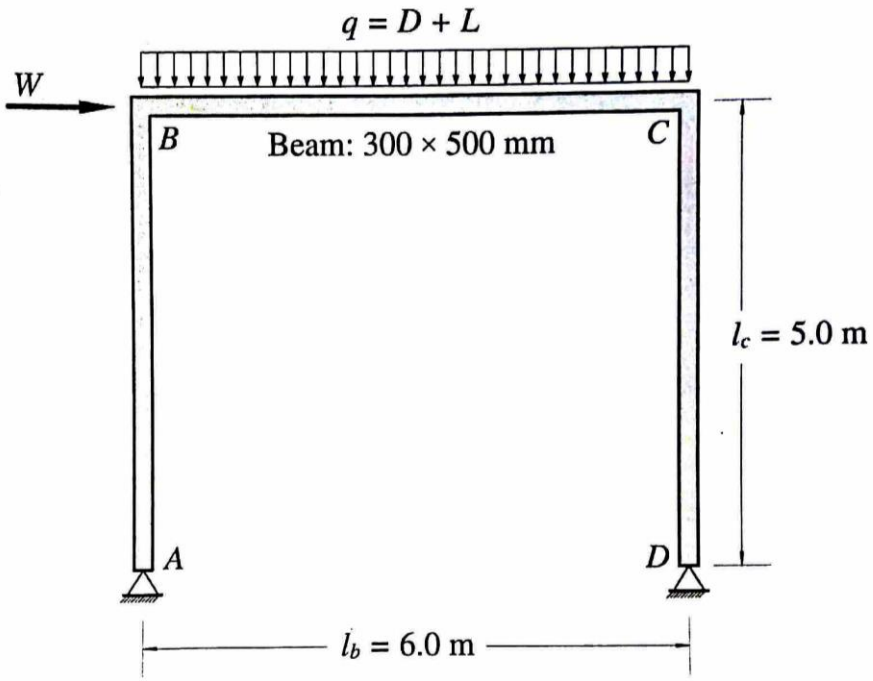
۳- تعیین δ_s از روابط (۱۰-۲۹) یا (۱۰-۳۰)، و یا تعیین $\delta_s M_s$ به طور مستقیم از نتایج آنالیز الاستیک مرتبهٔ دوم؛

۴- تعیین لنگرهای انتهایی تشدید شدهٔ ستون از روابط (۱۰-۲۸)؛

۵- کنترل امکان تشدید لنگر در میانهٔ ستون بر اساس رابطهٔ (۱۰-۳۱)؛ و محاسبهٔ لنگر تشدید یافته به صورت $M_c = \delta_{ns} M_2$ در صورت لزوم؛

۶- کنترل مقاومت و پایداری کلی سازه تحت بارهای قائم با ضریب؛ در این کنترل باید نشان داده شود که اگر بر اساس بارهای قائم با ضریب عمل شود، $\delta_s \le 2.5$ خواهد بود.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.



شکل ۱۰-۹ *قاب یک دهانه و یک طبقهٔ بتن‌آرمه مورد استفاده در مثال ۱۰-۴*

حل: در بررسی این قاب، ترکیبات زیر را در نظر می‌گیریم:

ردیف	ترکیب مورد نظر	P_u (kN)	M_{uB} (kN.m)
۱	$1.2D+1.6L$	380	203.6
۲	$1.2D+0.5L+1.6W$	206.2	298.7
۳	$1.2D+0.5L-1.6W$	311.8	-21.3

$$A_{g\,(\text{trial})}=\frac{P_u}{0.44(f_c'+\rho_t f_y)}=\frac{380\times10^3}{0.44\times(28+0.015\times420)}=25180\,\text{mm}^2$$

چون ترکیب دوم بارگذاری، لنگر خمشی بسیار بزرگی را شامل می‌شود ($e=1500\,\text{mm}$)، بنابراین باید مقطع به مراتب بزرگ‌تری را انتخاب کنیم. فرض کنیم مقطع مربعی $400\times400\,\text{mm}$ با فولادگذاری در دو وجه موازی محور خمش مناسب باشد. از آن‌جا که ترکیب بارگذاری ۳ در مقایسه با ترکیبات ۱ و ۲ بحرانی به نظر نمی‌رسد، فقط ترکیبات ۱ و ۲ بارگذاری را در طراحی دخالت می‌دهیم.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

$$\psi_B=\frac{\sum EI_c/l_c}{\sum EI_b/l_b}=\frac{0.7E_c\times(1/12)(400)^4/(5\times10^3)}{0.35E_c\times(1/12)(300)(500)^3/(6\times10^3)}=1.64$$

با استفاده از نموگراف شکل ۱۰-۶- ب، $k=2.2$ به‌دست می‌آید.

$$\frac{kl_u}{r}=\frac{2.2\times4.75\times10^3}{0.3\times400}=87.0>22.0\rightarrow$$ *لاغری در محاسبه وارد می‌شود*

الف- بررسی ترکیب بارگذاری ۲

$$P_c=\frac{\pi^2EI}{(kl_u)^2}\quad;\quad EI=\frac{0.4E_cI_g}{1+\beta_d}$$

$$\beta_d=\frac{\text{حداکثر برش دائمی با ضریب در طبقه}}{\text{حداکثر برش با ضریب در طبقه}}=0$$

$$EI=0.4\times4700\sqrt{28}\times(1/12)(400)^4=2.12\times10^{13}\ \text{N.mm}^2$$

$$P_c=\frac{\pi^2\times2.12\times10^{13}}{(2.2\times4.75\times10^3)^2}=1916\times10^3\ \text{N}$$

در محاسبهٔ $\sum P_u$ جهت جای‌گذاری در رابطهٔ δ_s، با توجه به این‌که جمع نیروهای محوری کلیهٔ ستون‌های یک طبقه تحت بار جانبی صفر است، فقط تأثیرات بارهای قائم وارد می‌شود؛ بنابراین برای ترکیب بارگذاری ۲ خواهیم داشت:

$$\sum P_u=2\times(1.2\times170+0.5\times110)=2\times259=518\,\text{kN}$$

$$\delta_s=\frac{1}{1-\frac{\sum P_u}{0.75\sum P_c}}=\frac{1}{1-\frac{2\times259}{0.75\times2\times1916}}=1.22$$

$$M_{ns}=1.2\times91+0.5\times59=138.7\,\text{kN.m}$$

$$M_s=1.6\times100=160\,\text{kN.m}$$

$$M_2=M_{ns}+\delta_sM_s=138.7+1.22\times160=333.9\,\text{kN.m}$$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

$$\frac{l_u}{r}=\frac{4.75\times10^3}{0.3\times400}=39.6<\frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f_c'A_g}}}=\frac{35}{\sqrt{\frac{206.2\times10^3}{28\times(400)^2}}}=163.1$$

بنابراین لنگر انتهایی ستون، لنگر حداکثر بوده و نیاز به تشدید مجدد نیست.

$$M_c=M_2=333.9\,\text{kN.m}\quad;\quad P_u=206.2\,\text{kN}$$

برای طراحی ستون، با فرض 60 mm به عنوان فاصلهٔ مرکز فولاد طولی تا دورترین تار کششی یا فشاری مقطع، داریم:

$$\gamma=\frac{400-2\times60}{400}=0.7$$

چون مقدار لنگر زیاد است، فرض می‌کنیم $\phi=0.9$ باشد؛ این فرض باید با مراجعه به نمودار مربوطه کنترل شود.

$$K_n=\frac{P_n}{f_c'A_g}=\frac{P_u}{\phi f_c'A_g}=\frac{206.2\times10^3}{0.9\times28\times(400)^2}=0.051$$

$$R_n=\frac{M_n}{f_c'A_g h}=\frac{M_u}{\phi f_c'A_g h}=\frac{333.9\times10^6}{0.9\times28\times(400)^2\times400}=0.207$$

با مراجعه به شکل پ۱-۲۲ از نمودارهای طراحی پیوست ۱، $\rho_g=0.035$ به‌دست می‌آید. در ضمن نمودار مربوطه نشان می‌دهد که $\varepsilon_t>0.005$ است و بنابراین فرض $\phi=0.9$ صحیح بوده است.

بررسی پایداری جانبی کلی قاب تحت بارهای ثقلی، بر اساس بارهای با ضریب $1.2D+1.6L$ انجام می‌گیرد. در این حالت β_d به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta_d=\frac{\text{حداکثر بار محوری با ضریب دائمی}}{\text{حداکثر بار محوری با ضریب}}=\frac{\sum(1.2P_D)}{\sum(1.2P_D+1.6P_L)}$$

$$=\frac{2\times(1.2\times170)}{2\times(1.2\times170+1.6\times110)}=0.54$$

$$P_c=\frac{1916}{1+0.54}=1244.2\,\text{kN}$$

$$\sum P_u=2\times(1.2\times170+1.6\times110)=2\times380=760\,\text{kN}$$

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

$$\delta_s = \frac{1}{1-\frac{2\times 380}{0.75\times 2\times 1244.2}} = 1.69 < 2.5 \quad \checkmark$$

چون $0 < \delta_s < 2.5$ است، بنابراین پایداری کلی سازه تحت بارهای قائم تأیید می‌شود.

ب- بررسی ترکیب بارگذاری ۱

$$\frac{l_u}{r} = 39.6 < \frac{35}{\sqrt{\frac{P_u}{f_c' A_g}}} = \frac{35}{\sqrt{\frac{380\times 10^3}{28\times (400)^2}}} = 120.2$$

$$\Rightarrow M_c = M_2 = M_{ns} + \delta_s M_s = M_{ns} = 203.6\,\text{kN.m}$$

یعنی در این مثال در حالت ترکیب بار قائم، لنگر تشدید نمی‌شود. برای استفاده از نمودارهای طراحی با فرض $\phi = 0.9$ داریم:

$$K_n = \frac{P_u}{\phi f_c' A_g} = \frac{380\times 10^3}{0.9\times 28\times (400)^2} = 0.094$$

$$R_n = \frac{M_u}{\phi f_c' A_g h} = \frac{203.8\times 10^6}{0.9\times 28\times (400)^2\times 400} = 0.126$$

چون $\gamma = 0.7$ است، با توجه به شکل پ۱-۲۲، $\rho_g = 0.015$ به‌دست می‌آید؛ ضمن آن‌که فرض $\phi = 0.9$ نیز تأیید می‌شود. بنابراین ترکیب بارگذاری ۲ بحرانی‌تر بوده است و برای طرح ستون از یک مقطع مربعی $400\times 400\,\text{mm}$ با فولاد گذاری در دو وجه موازی محور خمش و با $\rho_g = 0.035$ استفاده می‌شود.

$A_{st} = \rho_g bh = 5600\,\text{mm}^2$ USE 8Φ30 *(در دو وجه موازی محور خمش)*

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

مثال. نتایج حاصل از آنالیز الاستیک مرتبه اول در یک قاب مهاربندی شده تحت بار قائم نشان می‌دهد که ستونی باطول آزاد $l_u = 4m$ تحت بار قائم با ضریب $P_u = 1200\,kN$ و لنگرهای انتهایی با ضریب و اعداد ساده $M_{1u} = 50\,kN.m$, $M_{2u} = 65\,kN.m$ قرار دارد. بار مرده بدون ضریب ستون $P_D = 550\,kN$ است. ضریب موثر طول ستون $k = 0.85$ بدست آمده است. با فرض اینکه ابعاد ستون $300mm$ باشد، تعیین کنید که ستون برای چه لنگر خمشی باید طراحی شود. $f'_c = 35\,MPa$; $f_y = 420\,MPa$

حل مثال. ابتدا بررسی می کنیم که آیا می توان از آثار لاغری ستون صرف نظر کرد یا نه.

$$\frac{kl_u}{r} = \frac{0.85 \times 4000\,(mm)}{0.3 \times 300} = 37.8 \quad \not< \quad 34 - 12\frac{M_1}{M_2} = 34 - 12\frac{50}{65} = 24.8$$

چون ضریب لاغری ستون بیشتر از مقدار حدی آن است، لاغری ستون باید مدنظر قرار گیرد.

$$\beta_d = \frac{1.2 P_D}{1.2 P_D + 1.6 P_L} = \frac{1.2 \times 550}{1200} = 0.55$$

$$EI = \frac{0.4 E_c I_g}{1+\beta_d} \quad ; \quad E_c \cong 4700\sqrt{f'_c} = 4700\sqrt{35} = 27800\,MPa$$

$$EI = \frac{0.4 \times 27800 \times (300 \times 300^3/12)}{1+0.55} = 4.84 \times 10^{12}\ N.mm^2$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 4.84 \times 10^{12}}{(0.85 \times 4000)^2} = 4136 \times 10^3\ N$$

$$C_m = 0.6 + 0.4\frac{M_1}{M_2} = 0.6 + 0.4 \times \frac{50}{65} = 0.908$$

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1 - P_u/(\phi P_c)} = \frac{0.908}{1 - 1200/(0.75 \times 4136)} = 1.48$$

$$M_c = \delta_{ns} M_2 = 1.48 \times 65 = 96.2\ kN.m$$

بنابراین ستون باید برای $P_u = 1200\,kN$, $M_c = 96.2\,kN.m$ طراحی شود.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر مربوط به مولف می باشد و زیراکس و یا استفاده از آن با اجازه کتبی از صاحب اثر و با ذکر منبع بلامانع است. در غیر اینصورت شرعا حرام و پیگرد قانونی خواهد داشت.

مثال: دریک ساب بتن آرمه که متشکل از ۵ ستون است، ابعاد همه ستون‌ها 400×600 mm است (600 در جهت حرکت قرار می‌گیرد) اگر هریک از ستون‌ها زیر اثر بارهای ثقلی و زلزله ناگزیر از تحمل بار $P_u = 2300\,kN$ و $M_u = 300\,kN.m$ باشند، با درنظر گرفتن آثار لاغری بتن ترک‌خورده و یافته‌های سیستم را بررسی کنید.

حول دو محور ستون‌ها B مفصلی است

$f'_c = 20\,MPa$; $f_y = 400\,MPa$

با درنظر گرفتن اثرات لاغری بتن ترک‌خورده و اقتباس می‌یابد. با توجه به صورت سوال مشخص است که سیستم باربر جانبی قاب خمشی بوده که مهاربندی نشده محسوب می‌گردد.

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_c}} \geq 1 \quad ; \quad P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k l_u)^2} \quad ; \quad EI \simeq 0.25\, E I_g$$

$$E_c \simeq 4700\sqrt{f'_c} = 4700\sqrt{20} = 21 \times 10^3\,MPa$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{400 \times 600^3}{12} = 7.2 \times 10^9\,mm^4$$

$$EI = 0.25\, E_c I_g = 0.25 \times 21 \times 10^3 \times 7.2 \times 10^9 = 37.8 \times 10^{12}\,N.mm^2$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k l_u)^2} = \frac{\pi^2 \times 37.8 \times 10^9}{(6000)^2} \Rightarrow P_c = 10360 \times 10^3\,N = 10360\,kN$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{5 \times 2300 \times 10^3}{0.75 \times 5 \times 10360 \times 10^3}} \Rightarrow \delta_s = 1.42$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s}$$

$$M_2 = 0 + 1.42 \times 300 = 426\,kN.m$$

توجه: لنگر خمشی ستون تحت بارهای قائم نداده شده است و از طرفی می‌دانیم مقدار لنگر خمشی تحت اثر این بارها ناچیز است. پس $M_{2ns} = 0$ فرض می‌گردد.